ROMÂNIA

Lycée Louis-le-Grand, Concursul pentru admiterea în Clasele Pregătitoare pentru Marile Şcoli de Ingineri din Franţa

Specializarea Matematică, Fizică şi Ştiinţe inginereşti

Sesiunea 2017

Proba este alcătuită din 10 exerciții distincte, care pot fi rezolvate în ordine aleatorie. Este interzisă folosirea calculatoarelor de buzunar.

1. Pentru n aparține lui ℕ, fie

$$u_n = 9n^2 - 6n - 1 + (-2)^n$$

Arătați că 27 divide u_n pentru orice n din ℕ.

2. a) Fie y un număr real astfel încât $sin(y) \neq 0$. Calculați în funcție de $cos(2y)$ urmatoarea expresie:

$$\frac{sin(3y)}{sin(y)}$$

b) Fie x un element din $]0,\pi[$. Pentru $n \in \mathbb{N}$ definim

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(\frac{1 + 2\cos\left(\frac{2x}{3^k}\right)}{3} \right).$$

Simplificați expresia lui u_n. Determinați limita șirului $(u_n)_{n\geq 0}$ când n tinde spre $+\infty$.

3. Fie C un număr real. Pentru x din $\mathbb{R}_+^*$ definim funcția

$$f(x) = x + Cx^2 \sin(1/x).$$

Determinați C astfel încât să existe $\alpha > 0$ și f să fie crescătoare pe intervalul $]0,\alpha]$.

4. Fie n aparținând lui $\mathbb{N}^*$, a și b două numere reale astfel încât $0 < a < b$. Fie funcția $f:[a,b]^n \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \right)$$

pentru

$$\forall(x_1, \ldots, x_n) \in [a, b]^n.$$

Determinați minimul şi maximul funcției *f*.

5. Determinați numărul real $C > 0$ astfel încât pentru orice număr întreg $n \geq 2$ expresia:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \leq C\, n \ln(n).$$

să fie adevărată.

6. Se dau trei puncte distincte *A*, *B*, *C* în plan. Pentru *n* aparținând lui ℕ, numim drum de lungime *n* orice (n+1)-tuplu $(A_0, A_1, \ldots A_n)$ format cu elemente ale mulțimii $\{A,B,C\}$ astfel încât

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\text{-}1\}, \qquad A_{i+1} \neq A_i$$

Se notează α_n (respectiv β_n, respectiv γ_n) numărul de drumuri de lungime *n,* astfel încât $A_0=A$ și $A_n=A$ (respectiv $A_0=A$ și $A_n=B$, respectiv $A_0=A$ și $A_n=C$). Să se determine α_n, β_n, şi γ_n.

7. Fie *A*, *B*, *C* trei puncte distincte necoliniare din plan. Fie *A'* , *B'* , *C'* puncte definite prin

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{\overrightarrow{AB}}{3}, \quad \overrightarrow{BA'} = \frac{\overrightarrow{BC}}{3}, \quad \overrightarrow{CB'} = \frac{\overrightarrow{CA}}{3}.$$

Se notează *A''* (respectiv *B''*, respectiv *C''*) punctul de intersecție dintre (*BB'*) și (*CC'*) (respectiv (*CC'*) și (*AA'*), respectiv (*AA'*) și (*BB'*)). Calculați aria *S''* a triunghiului *A''B''C''* în funcție de aria *S* a triunghiului ABC.

8. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, se notează $d_1(n)$ (respectiv $d_3(n)$) numărul de elemente $k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât *k* divide *n* si $k \equiv 1$ [4] (respectiv $k \equiv 3$ [4]). Comparați $d_1(n)$ si $d3(n)$ şi determinați întregii $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $d_1(n) = d_3(n)$.

9. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât 2^{n-1} divide $n!$.

10. Fie *n* şi *N* din $\mathbb{N}^*$, $a_1<a_2<\ldots<a_n$ elemente din $\{1, \ldots, N\}$.

Pentru $1 \leq i \leq n$, fie

$$S_i = \sum_{j=1}^{n-i} (a_{j+i} - a_j) \, .$$

a) Arătați că dacă

$$i \leq \frac{n-1}{2}$$

pentru $i \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\Longrightarrow \quad S_i \leq iN.$$

Presupunem că diferențele $a_j - a_i$ pentru $1 \leq i < j \leq n$ sunt distincte două câte două.

Pentru orice $k \in \{1, \ldots n\text{-}1\}$ fie

$$d = nk - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Demonstrați următoarele inegalități:

b)

$$\sum_{i=1}^{k} S_i \geq \frac{d(d+1)}{2}.$$

c)

$$n \leq \sqrt{N} + N^{1/4} + 1.$$