ROMÂNIA

Lycée Louis-le-Grand, Concursul pentru admiterea în Clasele Pregătitoare pentru Marile Şcoli de Ingineri din Franţa, Specializarea Matematică, Fizică şi Ştiinte inginereşti

Sesiunea 2016

Proba este alcătuită din 11 exerciții distincte, care pot fi rezolvate în ordine aleatorie. Este interzisă folosirea calculatoarelor de buzunar.

1. Calculați numerele reale y astfel încât $x \in \mathbb{R}$ să verifice

$$y = (1 + \cos(x))\,(1 + \sin(x))$$

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $a \in [0, n]$. Calculați valoarea maximă a expresiei

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(x_k)$$

unde $x_1, \ldots, x_n$ sunt numere reale astfel încât

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(x_k) \geq a\ ?$$

3. Fie Γ un cerc de rază r și A, B, C, D patru puncte ale Γ astfel încât dreptele (AC) și (BD) sunt perpendiculare în punctul M. Calculați

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$$

în funcție de r.

4. Calculați numerele complexe z astfel încât $a,b \in \mathbb{R}^{+*}$ să verifice expresia

$$z^2 + az + b = 0.$$

5. Arătați că

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \cos(x) \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \leq 1.$$

6. Fie numărul real x. Se dă

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right).$$

Simplificați expresia lui u_n. Specificați pentru ce valori ale lui x șirul $(u_n)_{n\geq 0}$ este convergent și, în acest caz, dați limita acestuia.

7. Arătați că, dacă $r \in \mathbb{R}^{+*}$, cercul din planul $\mathbb{R}^2$ cu centrul în punctul de coordonate $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ și de rază r conține cel mult un punct de coordonate incluse în $\mathbb{Q}$.

8. Găsiți funcțiile f din $\mathbb{R}$ derivabile pe $\mathbb{R}$, astfel încât pentru orice x și y din $\mathbb{R}$ să fie adevărată expresia:

$$f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x).$$

9. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se notează cu a_n ultima cifră a lui n^n. Astfel:

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 4, \quad a_3 = 7, \quad a_4 = 4, \quad a_5 = 5, \quad a_6 = 6, \quad a_7 = 3.$$

Găsiți $t \in \mathbb{N}^*$ astfel încât :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_{n+t} = a_n.$$

10. Se dă următoarea expresie unde $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

a) Arătați că :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{H}_n \geq \ln(n).$$

b) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fie $\sigma(n)$ suma divizorilor lui n. De exemplu :

$$\sigma(60) = 1+2+3+4+5+6+10+12+15+20+30+60 = 168.$$

Arătați că

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{\sigma(n!)}{n!} \geq H_n.$$

c) Arătați că există o infinitate de numere întregi $m \geq 2$ astfel încât

$$\forall k \in \{1, \ldots, m-1\}, \qquad \frac{\sigma(m)}{m} > \frac{\sigma(k)}{k}.$$

11. Fie p un număr prim impar. Pentru $a \in \mathbb{Z}$ se notează $v_p(a)$ exponentul lui p la descompunerea în factori primi a lui a. Astfel, de exemplu:

$$v_3(140) = 0, \quad v_3(66) = 1, \quad v_3(18) = v_3(99) = 2.$$

Fie x și y două numere naturale distincte indivizibile cu p, dar p divide $x - y$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, arătați că :

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y) + v_p(n).$$